Rationality and Irrationality of Motivic Chow Series

AUTHOR(S):

木村, 俊一

CITATION:

木村, 俊一. Rationality and Irrationality of Motivic Chow Series. 代数幾何学シンポジウム記録 2013, 2013: 5-14

ISSUE DATE:

2013

URL:

http://hdl.handle.net/2433/215004

代数幾何学シンポジウム記録
2013年度　pp.5-14

RATIONALITY AND IRRATIONALITY OF MOTIVIC CHOW SERIES

SHUN-ICHI KIMURA

ABSTRACT. Classical Weil Conjecture was generalized to the rationality of motivic zeta function by Kapranov in 2000. We introduce the notion of Motivic Chow series, which is a generalization of the motivic Zeta, and study its rationality and irrationality behavior.

The first half is just a definition and advertisement of the notion of the K-rings and the motivic zeta, and is presented in Japanese.

1. K-環

このストーリーの舞台は、K-環です。代数幾何の専門家ですら、「K-環の研究をしています」と言うと「難しいことをやっているんですね」と、すぐにでも逃げ出したそうな表情で反応されることが多いのですが、そんなことはない、K-環は人間の数学本能に根ざしたきわめて自然かつまっとうな研究対象なんだ、というご説明から始めたいと思います。

主張 1. K-環は易しく、人間の数学本能に根ざしたものである。

証明:　初等的な教科書にも説明されていることから、明らかである。例えば Hartshorne 著 「Algebraic Geometry」（Springer GTM 52）の第２章 Exercise 6-16 で取り上げられている。「K-環」という言葉はなくとも事実上 K-環の概念があらわれた初等的な数学書の例としては、受験研究社による「幼児の能力トレーニング３　かずとたしざん入門」の中でクマやタヌキの有限集合を同型類によって分類させる問題、さらにそのような有限集合の非交和として和を定義して計算させる問題が出題されている。 □

注意 2. $1+1=2$ のような等式は、我々が思っている程自明ではないのかも知れない。「八ヶ月かけても、ピダハンはひとりとして１０まで数えられるようにならなかった。誰ひとり、３＋１を、それどころか１＋１も計算できるようにならなかった（少なくとも１＋１はいつも２と書くか言うかすることができるようになるのが「計算できる」証拠だとすれば）」[エヴェレット, p168] 一方、ネコに「６」という数に反応する神経細胞が見つかっている。「ある神経細胞は、どんな事象でも６回起これば、その後に決まって反応した。６回の閃光、６回の短い音、６回

の長い音のいずれに対しても、この神経細胞は反応した。[ドゥアンヌ, p 65– 66]

あまりに自明過ぎて、一度もきちんと述べられているのを見た事がありませんが、人類の（ネコも含む？）数学の出発点は次の定理でありましょう。

定理 3. （数学の最初の定理）有限集合の圏の K-環は、整数環である。

$$K(FSets) = \mathbb{Z}$$

より正確に言うと、有限集合の K-環として整数環が発見されたわけです。さらに正確に言うなら、0 の発見が 7 世紀頃のインド、負の数が一般に認知されたのが早く見積もってもステヴィンとジラールが数直線による説明を与えた１７世紀後半以降であることを踏まえれば、「人類最初の定理」とすべきは、和と積だけが定義され、和の逆元を要求しない「半環」という概念を考えて、空でない有限集合の圏の K-半環は自然数半環、と言うべきところかも知れません。

ちなみに、圏 $\mathcal{C}$ の K-環 $K(\mathcal{C})$ の定義は次のようにします。（ただし、この定義では整数環は仮定するので、有限集合の場合にこの定義は循環論法となります。適宜解釈してください。）

定義 4. $\mathcal{C}$ は「和」と「積」が定義された圏とする（例えば有限集合の圏では、X と Y の「和」とは非交和 $X \amalg Y$、X と Y の「積」とは直積 $X \times Y$ とする。一般に何をもって和、積と呼んで良いことにするかはここではあまりこだわらないことにする）。この時 $\mathcal{C}$ の K-環 $K(\mathcal{C})$ は次のように定義する。

(0) $\mathcal{C}$ の対象 X に対して $K(\mathcal{C})$ の元 $[X]$ が定まり、環 $K(\mathcal{C})$ は $\mathbb{Z}$ 上これらの $[X]$ たちによって生成される。（また、積の単位元があれば、それを $1 \in \mathbb{Z}$ と同一視する。）
(1) $[X] + [Y] = [X \amalg Y]$
(2) $[X] \times [Y] = [X \times Y]$
(3) X と Y が同型なら $[X] = [Y]$

あとで例をあげますが、必要に応じてさらに「自然な」関係式を入れることもあります。

このように、元々は $X \in \mathcal{C}$ に対して、その K-環でのクラス $[X]$ は「X の元の個数」と言うべきものでした。しかしカントールの発見により、そのような捉え方は現代数学では通用しない、という気分が広がります。

定理 5. （カントール）$Sets$ を（無限集合も許した）集合の圏とすると、$K(Sets) = 0$

証明: 任意の集合 X に対して、Y は X 以上の位数を持つ無限集合とすれば $X \amalg Y$ と Y との間に全単射を作ることができ、よって $[Y] = [X \amalg Y] = [X] + [Y]$、つまり $[X] = 0$ となる。 □

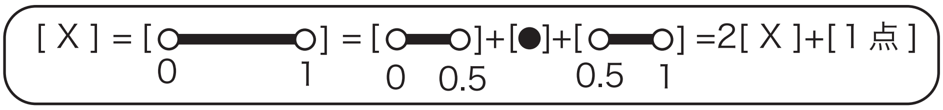
その後で、ベクトル束などに K-環の定義を適用すれば面白い環が得られて面白い数学ができることをグロタンディエクが発見したわけですが（Hartshorne の exersice 参照)、その時には既に K-環は「元の個数」みたいなものではなく、もっと抽象的なもの、という再登場をしてしまったのでした。（そのため、「K-環が難しい、という先入観を人々に与えている。）しかし、そのような K-環がトリヴィアルでない、ということは、見方を変えてみると次のように解釈できるわけです。

考察 6. 無限集合でも、元がバラバラでなく何かの構造を持っているのであれば、その無限集合の元の「個数」を K-環でのクラスとしてとらえられることがある。

そのような例として、「良い」位相空間の圏 Top を考えてみましょう。ここでは追加の関係式

$$[X] = [U] + [C]$$

を入れて考えるものとします。但し $C \subset X$ は任意の閉集合、$U = X \backslash C$ はその補集合、とします。K-環の公理 (1) と考え合わせると、$[U \amalg C]$ と $[X]$ とを同一視するのだ、と思っても構いません。さて、この K-環において開区間 $X := (0, 1)$=に含まれる点の個数を数えてみましょう。次の図から容易にわかるとおり、X の点の「個数」は -1 個と解釈するのが自然です。



無限集合に含まれる点の個数が負になる、というのは反直感的だし、「別の方法で数えたら別の値が出てくるかもしれない」つまり well-defined かどうかが心配になる人もいるかもしれません。しかし、この「-1」という値は Borel-Moore homology を用いた開区間のオイラー数に一致し、辻褄があっています。一般に X のオイラー数を $e(X)$ と書けば、$e(X) = e(C) + e(U)$ という等式が成り立つので、Top が、オイラー数が有限で定まる程度に良い位相空間の圏であれば、$[X]$ を $e(X)$ へ送ることで自然な全射

$$K(Top) \to \mathbb{Z}$$

が定義され、しかも多くの場合（例えば有限 CW 複体など）でこれは同型になります。

2. モチビックゼータ

良い位相空間の K-環は整数環となり、「X の元の個数」が数として定義されます。しかし、一般には K-環は整数環より複雑になることがあり、K-環における X のクラス $[X]$ を見ただけではその X の大きさがわからない、ということがあります。圏 $\mathcal{C}$ の K-環が定義され、さらにその対象 X の「対称積」が定義されるならば、別の方法で X の「大きさ」を調べられる可能性があります。それがモチビックゼータです。

定義 7. 圏 $\mathcal{C}$ の K-環 $K(\mathcal{C})$ が定義され、さらに $X \in \mathcal{C}$ の d-次対称積 $\mathrm{Sym}^d X$ が定義されているとします。(K-環の場合の和や積と同様、「対称積とは何であるべきか」という疑問にはここでは踏み込まないことにします。) このとき、X のモチビックゼータ $\zeta_X(t)$ とは、次のような形式的無限ベキ級数として定義します。

$$\zeta_X(t) := \sum_{d=0}^{\infty} [\mathrm{Sym}^d X] t^d \in K(\mathcal{C})[[t]]$$

例えば X が有限集合で、その元の個数は n 個だとしましょう。そうすると、$\mathrm{Sym}^d X$ とは X の元を重複を許して合計 d 個取ってくる選び方の個数(代数幾何でより慣れた例で言えば、n 変数多項式の d 次斉次単項式の個数)であり、

$$\left|\mathrm{Sym}^d X\right| = \binom{n+d-1}{n-1}$$

となるので $K(FSets)[[t]] = \mathbb{Z}[[t]]$ における X のモチビックゼータは

$$\zeta_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{n-1} t^d = \frac{1}{(1-t)^n}$$

となります。分母の次数として、「X の大きさ」があらわれていることに注目してください。

事実 8. (練習問題?) $\mathcal{V}^{\pm}$ は $\mathbb{Z}_2$-*graded* 有限次元ベクトル空間の圏とする。つまり $V \in \mathcal{V}^{\pm}$ は $V = V^+ \oplus V^-$ というように偶部分と奇部分の直和として表されるとする。和は直和、積はテンソル積で定義する(偶奇は通常の規約に従う)。1次元偶ベクトル空間は積の単位元なので、$1 \in K(\mathcal{V}^{\pm})$ と同一視する。また1次元奇ベクトル空間のクラスを $J \in K(\mathcal{V}^{\pm})$ と表すことにする。このとき、次が成り立つことがわかる。

(1) $K(\mathcal{V}^{\pm}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdot J = \mathbb{Z}[J]/(J^2 - 1)$
(2) $V = V^+ \oplus V^-$ なら

$$\zeta_V(t) = \frac{(1+Jt)^{\dim V^-}}{(1-t)^{\dim V^+}}$$

一般に、X が「有限的な」空間構造を持てば、そのモチビックゼータは有理関数になる。特に、その分子は X の「奇」的な大きさをあらわし、分母は X の「偶」的な大きさをあらわす。

3. Motivic Zeta of Algebraic Varieties

One variation of Weil conjectures (and Dwork's theorem) says:

Theorem 9. *When X is an algebraic variety over a finite field $\mathbb{F}_q$, then*

$$\sum_{d=0}^{\infty} \# \left(\mathrm{Sym}^d(X)(\mathbb{F}_q)\right) t^d$$

is rational in $\mathbb{Z}[[t]]$.

Kapranov [Kapranov00] observed the following:

Theorem 10. *When X/k is a curve, then*

$$\sum_{d=0}^{\infty} \left[\mathrm{Sym}^d(X)\right] t^d$$

is rational in $K(AlgVar/k)[[t]]$.

Proof. When $X = U \amalg C$, one easily checks that $\zeta_U(t) \cdot \zeta_C(t) = \zeta_X(t)$, and the motivic zeta of a point is clearly rational, so we may assume that X is smooth projective. When $d > 2g-2$, then the natural morphism $\mathrm{Sym}^d X \to Jacobian(X) =: Jac(X)$ is a projective $(d-g)$-bundle.

Lemma 11. *When $\pi : X \to Y$ is a projective d-bundle, then $[X] = [Y] \times [\mathbb{P}^d]$ in $K(AlgVar)$.*

Proof. One can decompose Y into a stratification $Y = \amalg Y_i$ so that $\pi^{-1}(Y_i) = Y_i \times \mathbb{P}^d$. Then we have

$$[X] = \sum \pi^{-1}(Y_i) = \sum [Y_i] \times [\mathbb{P}^d] = [Y] \times [\mathbb{P}^d]$$

(end of the proof of Lemma 11) □

To prove the rationality of $\zeta_X(t)$, it is enough to show that the sum for $d > 2g-2$ is rational. Using the equaltiy

$$[\mathbb{P}^d] = [1] + [\mathbb{A}^1] + [\mathbb{A}^2] + \cdots + [\mathbb{A}^d] = \frac{1-[\mathbb{A}^1]^{d+1}}{1-[\mathbb{A}^1]}$$

one calculates

$$\begin{aligned}
&\sum_{d>2g-2} [\mathrm{Sym}^d X] t^d \\
= &\sum_{d>2g-2} [\mathrm{Jac}(X)] \frac{1-[\mathbb{A}^1]^{d-g+1}}{1-[\mathbb{A}^1]} \\
= &\frac{[\mathrm{Jac}(X)]t^{2g-1}}{1-[\mathbb{A}^1]} \left(\frac{1}{1-t} - \frac{[AAA^g]}{1-t[\mathbb{A}^1]} \right) \\
= &\frac{[\mathrm{Jac}(X)]t^{2g-1}}{(1-t)(1-t[\mathbb{A}^1])} \frac{(1-[\mathbb{A}^g]) - t[\mathbb{A}^1](1-[\mathbb{A}^{g-1}])}{1-[\mathbb{A}^1]}
\end{aligned}$$

You may worry if the denominator $1-[\mathbb{A}^1]$ could be a zero-divisor, but you can easily check that in the last term, $\dfrac{(1-[\mathbb{A}^g]) - t[\mathbb{A}^1](1-[\mathbb{A}^{g-1}])}{1-[\mathbb{A}^1]}$ is actually a polynomial. □

Unfortunately, the motivic zeta $\zeta_X(t)$ is not rational in general for higher dimension (see [Larsen-Lunts04]). On the other hand, it is known that there is a natural morphism $K(AlgVar) \to K(ChowMotive)$ which sends $[X]$ to $[M(X)]$ where $M(X)$ is the Chow motive of X, for smooth projective X in characteristic 0 (see [Bittner04]). And we conjecture that the motivic zeta of Chow motive $\zeta_{M(X)}(t)$ is always rational. This conjectured rationality is closely related with big conjectures in motivic world, for example, Bloch's conjecture for the representability of the Chow group of surfaces with $p_g = 0$.

4. Motivic Chow Series

When X is an algebraic variety and $\gamma \in H_{2d}(X, \mathbb{Z})$, we can define $C_\gamma(X)$ to be the Chow variety of X, which parametrizes the effective algebraic cycles with the homology class γ. For example, when $n \in \mathbb{Z} = H_0(X, \mathbb{Z})$, it is parametrized by $\mathrm{Sym}^n(X)$, the n-th symmetric product of X. Recall that the motivic zeta is the formal power series with the coefficient $\mathrm{Sym}^d(X)$. Then we can ask what happens when we replace the symmetric products by Chow varieties which parametrize higher dimensional cycles. There is an interesting result by Javier Elizondo:

Theorem 12. [Elizondo94] *When X is smooth projective toric variety, then the Euler Series*

$$E_d(X) := \sum_{\gamma \in H_{2d}(X)} e(C_\gamma(X)) t^\gamma$$

is rational in $\mathbb{Z}[[H_{2d}(X,\mathbb{Z})]]$*, where* $e(Y)$ *is the Euler character of* $Y(\mathbb{C})$*. We regard* t *as a formal variable, and when* $\gamma,\mu \in H_{2d}(X,\mathbb{Z})$*, we define*

$$t^{\gamma} \times t^{\mu} := t^{\gamma+\mu}.$$

Recall that the morphism $K(AlgVar/\mathbb{C}) \to \mathbb{Z}$ sending $[X]$ to $e(X)$ is a ring homomorphism because when $C \subset X$ is a closed subset with $U \subset X$ its compliment, we have $e(C) + e(U) = e(X)$. So the natural thing to try is to define the motivic Chow series $MC_d(X)$ to be

$$MC_d(X) := \sum_{\gamma \in H_{2d}(X)} [C_{\gamma}(X)]t^{\gamma}$$

and see if it is rational. I visited Mexico to solve this problem, we started to work together, and we got our result in a few hours.

Theorem 13. [Elizondo-K09] *The motivic Chow series* $MC_1(\mathbb{P}^2)$ *is* <u>*not rational*</u> *in* $K(AlgVar)[[H_2(\mathbb{P}^2)]]$ *nor in* $K(ChowMotive)[[H_2(\mathbb{P}^2)]]$.

Proof. One can compute

$$\begin{aligned} MC_1(\mathbb{P}^2) &= \sum_{d \in H_2(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{Z}} [C_d(\mathbb{P}^2)]t^d \\ &= \sum_{d \in \mathbb{Z}} [\mathbb{P}(H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(d)))]t^d \\ &= \sum_{d \geq 0} [\mathbb{P}^{\frac{1}{2}(d^2+3d)}]t^d \\ &= \sum_{d \geq 0} \frac{1 - [\mathbb{A}^1]^{\frac{1}{2}(d+1)(d+2)}}{1 - [\mathbb{A}^1]} t^d \end{aligned}$$

If it were rational, then $\sum [\mathbb{A}^1]^{\frac{1}{2}(d+1)(d+2)} t^d$ must be rational, namely, there must exist $a_0, a_1, \ldots, a_N \in K(AlgVar)$, not all zero, such that for $d \gg 0$,

$$\sum_{i=0}^{N} a_i [\mathbb{A}^1]^{\frac{1}{2}((d+i)^2 + 3(d+i) + 2)} = 0.$$

One can easily see that this condition implies that the dimensions of a_i's are unbounded, hence impossible. □

Now we wonder why taking the Euler character makes Chow series rational. The idea is to add a new relation $[\mathbb{A}^1] \sim [Pt]$, say "$\mathbb{A}^1$-homotopy" relation, which makes $[\mathbb{P}^{\frac{1}{2}(d^2+3d)}] \sim \dfrac{d^2+3d+2}{2}[Pt]$, hence

$$MC_1(\mathbb{P}^2) \sim \sum \frac{d^2+3d+2}{2} t^d = \frac{1}{(1-t)^3}.$$

It looks as if we count the number of $\mathbb{F}_1$-valued points, then the motivic Chow series becomes rational.

Let us denote the image of $MC_d(X)$ in $K(AlgVar/k)/([\mathbb{A}^1]-[Pt])[[H_{2d}(X,\mathbb{Z})]]$ by $MC_d(X)_{\mathbb{A}^1}$.

Theorem 14. [Elizondo-K12] *When X is a toric variety, then we have*

$$MC_d(X)_{\mathbb{A}^1} = \prod_{V:d\text{-}dim\ Orbit} \frac{1}{1-t^{\deg \overline{V}}}$$

where $\overline{V}$ is the Zariski closure of the orbit V, and $\deg \overline{V}$ is homology class of $[\overline{V}]$.

Proof. By Thomason's Torus generic slice theorem [Thomason86], when a torus $T = \mathbb{G}_m^n$ acts on Y, then Y has a stratification $Y = \amalg(U_i \times T_i)$ with $T \twoheadrightarrow T_i$ quotient tori. Unless $T_i = Pt$, we have $[T_i] = ([\mathbb{A}^1] - [Pt])^{\dim T_i} \sim 0$ modulo $\mathbb{A}^1$-homotopy, hence $[Y] \sim [T\text{-fixed locus}]$.

When X is a toric variety and $\gamma \in H_{2d}(X,\mathbb{Z})$, the torus T acts on $C_\gamma(X)$, and an algebraic cycle $\sum n_i[V_i]$ is a T-fixed point if and only if each V_i is a closure of an orbit. As there are only finitely many orbits in the toric variety X, Theorem easily follows. □

Using a similar technique, we can calculate as in Example 15.

Example 15. [Elizondo-K12] Let $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ be a blow-up along r colinear points, with E_i exceptional curve and L the strict transform of a general line in $\mathbb{P}^2$, and set $t_0 := t^{[L]}$ and $s_i := t^{[E_i]}$, then we have

$$MC_1(X)_{\mathbb{A}^1} = \frac{(1-t_0 s_1 s_2 \cdots s_r)^{r-2}}{1-t_0} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{(1-t_0 s_1 \cdots \hat{s_j} \cdots s_r)(1-s_i)}$$

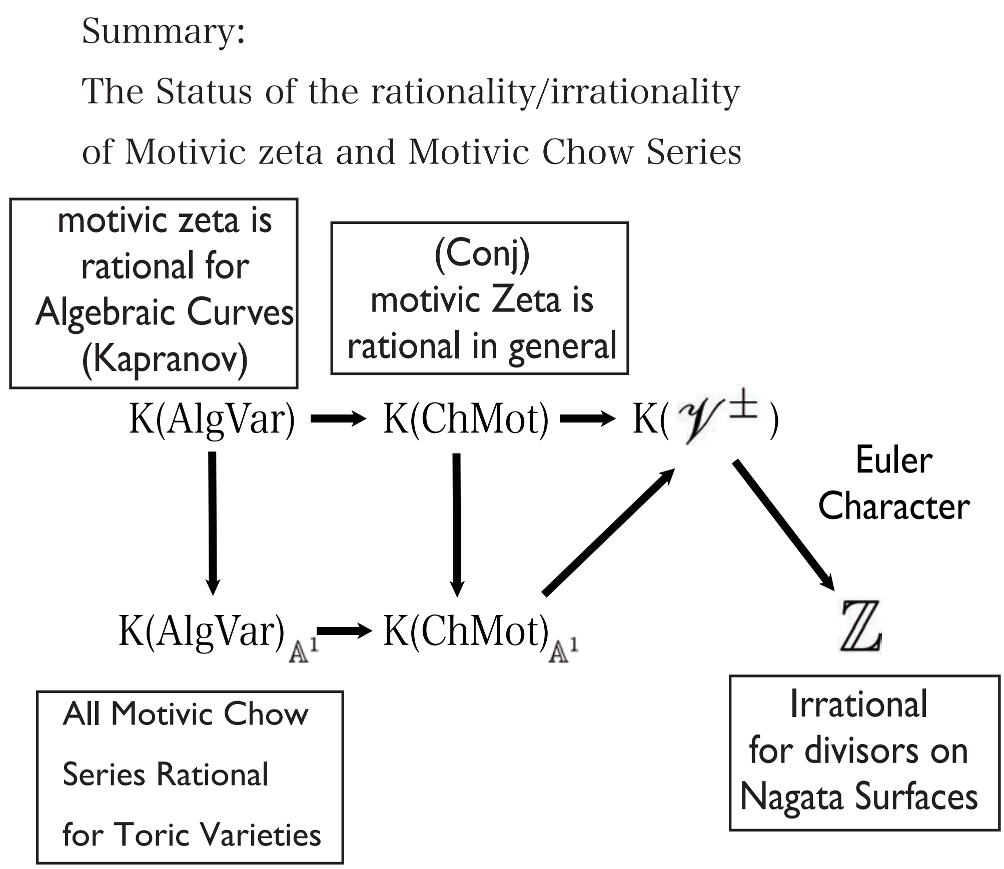
Corollary 16. *The motive of X does not determine the Motivic Chow series.*

In fact, the motive a blow-up of $\mathbb{P}^2$ along points depends only on the number of points, not their configuration. In particular, 3 points blow-ups of $\mathbb{P}^2$ have the same motive whichever the points are colinear or not. But if the 3 points are not colinear, then the blow-up is a toric variety, and hence its motivic Chow series have no numerator by Theorem 14. On the other hand, Example 15 says that if the 3 points are colinear, the motivic Chow Series modulo $\mathbb{A}^1$-homotopy has non-trivial numerator.

One may hope that the motivic Chow series is always rational modulo suitable equivalence relation, but this hope is shattered by the following result.

Theorem 17. [K-Kuroda-Takahashi] *When X is a blow-up of $\mathbb{P}^2$ along many general points, then the Euler Series $E_1(X)$ in $\mathbb{Z}[[H_2(X)]]$ is irrational.*

(sketch of the proof) By Nagata's theorem, the closure of the effective cone is not finitely generated. If $E_1(X)$ can be written as $f(t)/g(t)$ in $\mathbb{Z}[[H_2(X)]]$ with $f(t)$ and $g(t)$ coprime polynomials, then the closure of the effective cone is generated by the non-zero terms of $f(t)$ and $g(t)$, hence should be finitely generated.



References

[André] Y. André. *Motifs de dimension finite (d'après S. I. Kimura, P. Sullivan...)*, in Séminaire Bourbaki Vol. 2003/2004 Astérisque, vol. 299, Société Mathématique de Frace, 2005, Exp. 929, 115–145

[Bittner04] F. Bittner. *The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero.* Compos. Math. 140 1011 – 1032 (2004)

[Dwork60] B. Dwork. *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety*, American J. Math. (1960) 631–

[Elizondo94] J. Elizondo. *The Euler series of restricted Chow varieties*, Compos. Math. 94 (1994) 297–310

[Elizondo-K09] E. J. Elizondo, S. Kimura. *Irrationality of Motivic series of Chow varieties*, Math. Z. 263 (2009) 27–32

[Elizondo-K12] E. J. Elizond, S. Kimura. *Rationality of Motivic Chow Series modulo* $\mathbb{A}^1$*-homotopy*, Advances in Math. 230 (2012), 876–893

[Hartshorne77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, (1977) Springer

[Kapranov00] M. Kapranov: The elliptic curve in the S-duality theory and Eisenstein series for Kac-Moody groups, preprint(arXiv: math.AG/0001005).

[K-Kuroda-Takahashi] S. Kimura, S. Kuroda, N. Takahashi. *The Closed Cone of a Rational Series is Rational Polyhedral*, preprint

[K05] S. Kimura. *Chow groups are finite dimensional, in some sense*, Mathematische Annalen **331**, 173-201 (2005)

[Larsen-Lunts04] Larsen, M., Lunts, V. A.: Rationality criteria for motivic zeta functions, Compos. Math. **140**(2004), no. 6, 1537–1560.

[Thomason86] R. W. Thomason, *Comparison of equivariant algebraic and topological K-theory*, Duke Math 53 (1986) 795–825

[Weil49] A. Weil. *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bulletin of AMS 55 (1949) 497–508

[Yokura11] S. Yokura, *Motivic Characteristic classes*, in Topology of Stratified Spaces, MSRI Publications 58, (2011) 375–418

[エヴェレット] ダニエル・L・エヴェレット ピダハン —「言語本能」を超える分かと世界観, みすず書房 (2012)（Original: Daniel L. Elevett *Don't Sleep, There Are Snakes: Life and Language in the Amazonian Jungle*, Vintage (2009)）

[ドゥアンヌ] スタニスラス・ドゥアンヌ 数覚とは何か？ – 心が数を創り、操る仕組み, 早川書房 (2010) （Orignial: Stanislas Dehaene The Number Sense, How the Mind Creates Mathematics, Allen Lane (1998)）

[幼児] 幼児の能力トレーニング３ かずとたしざん入門, 受験研究社